



FD-2650

B.Sc./B.Sc. B.Ed. (Part-I)
Examination, 2022

MATHEMATICS

Paper - III

Vector Analysis and Geometry

Time : Three Hours] [*Maximum Marks* : 50

नोट : प्रत्येक प्रश्नों से किन्हीं दो भागों के उत्तर दीजिए।
सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

Note : Answer any **two** parts from each question. All
questions carry equal marks.

इकाई / Unit-I

1. (a) यदि $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ कोई तीन सदिश हों, तो सिद्ध
कीजिए कि

$$\left[\vec{a} + \vec{b}, \vec{b} + \vec{c}, \vec{c} + \vec{a} \right] = 2 \left[\vec{a} \vec{b} \vec{c} \right]$$

(2)

If $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ are any three vectors, then prove that $[\vec{a} + \vec{b}, \vec{b} + \vec{c}, \vec{c} + \vec{a}] = 2[\vec{a} \vec{b} \vec{c}]$.

- (b) फलन $\phi = 3x^2yz - 4y^2z^2$ का दिशीय अवकलन बिन्दु $(2, -1, 3)$ पर सदिश $3\hat{i} - 4\hat{j} + 2\hat{k}$ की दिशा में ज्ञात कीजिए।

Find the directional derivative of $\phi = 3x^2yz - 4y^2z^2$ at the point $(2, -1, 3)$ in the direction of the vector $3\hat{i} - 4\hat{j} + 2\hat{k}$.

- (c) सिद्ध कीजिए कि

$$\begin{aligned} \text{grad}(\vec{a} \cdot \vec{b}) &= \vec{a} \times \text{curl } \vec{b} + \vec{b} \times \text{curl } \vec{a} \\ &\quad + (\vec{a} \cdot \nabla) \vec{b} + (\vec{b} \cdot \nabla) \vec{a} \end{aligned}$$

Prove that

$$\begin{aligned} \text{grad}(\vec{a} \cdot \vec{b}) &= \vec{a} \times \text{curl } \vec{b} + \vec{b} \times \text{curl } \vec{a} \\ &\quad + (\vec{a} \cdot \nabla) \vec{b} + (\vec{b} \cdot \nabla) \vec{a} \end{aligned}$$

इकाई / Unit-II

2. (a) यदि $\vec{r}(t) = 5t^2\hat{i} + t\hat{j} - t^3\hat{k}$, तो सिद्ध कीजिए

$$\int_1^2 \left(\vec{r} \times \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \right) dt = -14\hat{i} + 75\hat{j} - 15\hat{k}$$

(3)

If $\vec{r}(t) = 5t^2\hat{i} + t\hat{j} - t^3\hat{k}$, then prove that

$$\int_1^2 \left(\vec{r} \times \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \right) dt = -14\hat{i} + 75\hat{j} - 15\hat{k}$$

(b) गॉउस के डाइवर्जेंस प्रमेय से $\iint_S \vec{F} \cdot \hat{n} ds$ का मूल्यांकन कीजिए, जहाँ $\vec{F} = 4x\hat{i} - 2y^2\hat{j} + z^2\hat{k}$ तथा क्षेत्र S , $x^2 + y^2 = 4$, $z = 0$ और $z = 3$ से परिबद्ध है।

Evaluate $\iint_S \vec{F} \cdot \hat{n} ds$ by Gauss's Divergence theorem, where $\vec{F} = 4x\hat{i} - 2y^2\hat{j} + z^2\hat{k}$ and S is surface bounded by $x^2 + y^2 = 4$, $z = 0$ and $z = 3$.

(c) $\int_C [(xy + y^2)dx + x^2dy]$ के लिए समतल में ग्रीन के प्रमेय का सत्यापन कीजिए, जहाँ C , $y = x$ तथा $y = x^2$ द्वारा परिभाषित क्षेत्र की परिसीमा है।

Verify Green's theorem in plane for $\int_C [(xy + y^2)dx + x^2dy]$, where C is the closed curve of the region bounded by $y = x$ and $y = x^2$.

इकाई / Unit-III

3. (a) सिद्ध कीजिए कि संनाभि शांकव समकोण पर प्रतिच्छेद करती है।

Prove that confocal conics cut at right angle.

- (b) शांकव $17x^2 - 12xy + 8y^2 + 46x - 28y + 17 = 0$ का अनुरेखण कीजिए तथा उनकी नियताएं ज्ञात कीजिए।

Trace the conic $17x^2 - 12xy + 8y^2 + 46x - 28y + 17 = 0$. Also find the equation of its directrics.

- (c) यदि PSP' शांकव $\frac{l}{r} = 1 + e \cos \theta$ की एक नाभिगत जीवा है, जिसकी नाभि S है, तो

सिद्ध कीजिए $\frac{1}{SP} + \frac{1}{SP'} = \frac{2}{l}$ ।

If PSP' is a focal chord of a conic whose focus is S and the conic is $\frac{l}{r} = 1 + e \cos \theta$,

then prove that $\frac{1}{SP} + \frac{1}{SP'} = \frac{2}{l}$.

इकाई / Unit-IV

4. (a) उस गोले का समीकरण ज्ञात कीजिए जो मूल बिन्दुओं $(a, 0, 0)$, $(0, b, 0)$, तथा $(0, 0, c)$ से होकर जाता है।

Find the equation of the sphere passing through the origin and the points $(a, 0, 0)$, $(0, b, 0)$ and $(0, 0, c)$.

- (b) सिद्ध कीजिए कि रेखाओं $x + y + z = 0$ तथा शंकु $ayz + bzx + cxy = 0$ के बीच का कोण

$\frac{\pi}{2}$ है, यदि $a + b + c = 0$ तथा $\frac{\pi}{3}$ है, यदि

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0$$

Prove that the angle between the lines and cone given by $x + y + z = 0$,

$ayz + bzx + cxy = 0$ is $\frac{\pi}{2}$, if $a + b + c = 0$

and $\frac{\pi}{3}$ if $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0$.

- (c) उस लम्बवृत्तीय बेलन का समीकरण ज्ञात कीजिए, जिसकी अक्ष

$$\frac{(x-1)}{3} = (y-2) = \frac{(z-5)}{2}$$

तथा त्रिज्या 5 है।

Find the equation of right circular cylinder whose radius is 5 and axis is

the line $\frac{(x-1)}{3} = (y-2) = \frac{(z-5)}{2}$.

इकाई / Unit-V

5. (a) शांकवज $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$ के बिन्दु (α, β, γ) पर स्पर्श समतल का समीकरण ज्ञात कीजिए।

Find equation of tangent plane at (α, β, γ) to the conicoid $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$.

- (b) वह प्रतिबन्ध ज्ञात कीजिए जब समतल $lx + my + nz = p$ परवलयज $ax^2 + by^2 = 2cz$ को स्पर्श करता है।

Find the condition that the plane $lx + my + nz = p$ may touch the paraboloid $ax^2 + by^2 = 2cz$.

- (c) अतिपरवलयज $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{16} = 1$ के बिन्दु $(2, 3, -4)$ से होकर जाने वाले जनकों के समीकरण ज्ञात कीजिए।

(7)

Find the equation of generating lines of
the hyperboloid $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{16} = 1$ which
pass through the points $(2, 3, -4)$.
