



FD-2709

B.Sc./B.Sc. B.Ed. (Part-II)
Examination, 2022

MATHEMATICS

Paper - II

Differential Equations

Time : Three Hours]

[*Maximum Marks* : 50

नोट : प्रत्येक प्रश्न से किन्हीं दो भागों के उत्तर दीजिए।
सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

Note : Answer any **two** parts from each question. All questions carry equal marks.

इकाई / Unit-I

1. (a) सिद्ध कीजिए :

$$\frac{d}{dx}(x^n J_n(x)) = x^n J_{n-1}(x)$$

Prove that :

$$\frac{d}{dx} \left(x^n J_n(x) \right) = x^n J_{n-1}(x)$$

(b) सिद्ध कीजिए :

$$\int_0^{\infty} e^{-ax} J_0(bx) dx = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Prove that :

$$\int_0^{\infty} e^{-ax} J_0(bx) dx = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

(c) सिद्ध कीजिए कि

$$\frac{1}{y-x} = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) P_n(x) Q_n(y)$$

जहाँ $P_n(x)$ और $Q_n(y)$ अपने सामान्य अर्थ में इस प्रकार हैं कि $x > 1$ और $|y| \leq 1$.

Prove that

$$\frac{1}{y-x} = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) P_n(x) Q_n(y)$$

Where $P_n(x)$ and $Q_n(y)$ have their usual meaning such that $x > 1$ and $|y| \leq 1$.

(3)

इकाई / Unit-II

2. (a) दर्शाइए कि

$$L\{\sinh at \sin at\} = \frac{2a^2 p}{p^4 + 4a^4}$$

Show that

$$L\{\sinh at \sin at\} = \frac{2a^2 p}{p^4 + 4a^4}$$

(b) हल कीजिए :

$$(D^2 + 6D + 5)y = e^{-t},$$

$$\text{यदि } y(0) = 0, y'(0) = 1$$

Solve :

$$(D^2 + 6D + 5)y = e^{-t},$$

$$\text{if } y(0) = 0, y'(0) = 1$$

(c) हल कीजिए :

$$(D^4 + 2D^2 + 1)y = 0$$

$$\text{जब } y(0) = 0, y'(0) = 1, y''(0) = 2, y'''(0) = -3$$

Solve :

$$(D^4 + 2D^2 + 1)y = 0$$

When $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = 2$,
 $y'''(0) = -3$

इकाई / Unit-III

3. (a) a एवं b को विलोपित कर आंशिक अवकल समीकरण ज्ञात कीजिए :

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = z^2 - c$$

Find the partial differential equation by eliminating a and b from the relation

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = z^2 - c$$

- (b) हल कीजिए :

$$x^2p + y^2q = nxy$$

Solve :

$$x^2p + y^2q = nxy$$

- (c) हल कीजिए :

$$z^2(p^2 + q^2) = x^2 + y^2$$

Solve :

$$z^2(p^2 + q^2) = x^2 + y^2$$

इकाई / Unit-IV

4. (a) समीकरण $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ का वर्गीकरण कीजिए और हल कीजिए।

Classify and solve the equation

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

- (b) समीकरण

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0 \quad \text{या} \quad r + 2s + t = 0$$

का वर्गीकरण और विहित रूप में समानयन कीजिए और इसे हल कीजिए।

Classify and reduce to canonical form to the equation

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0 \quad \text{or} \quad r + 2s + t = 0$$

and hence solve it.

- (c) हल कीजिए :

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} - 2\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} - \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} + 2\frac{\partial^3 z}{\partial y^3} = e^{x+y}$$

Solve :

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} - 2 \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} - \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} + 2 \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} = e^{x+y}$$

इकाई / Unit-V

5. (a) अन्तराल $[0, 1]$ में वक्रों $y = x$ एवं $y = x^2$ के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए।

Find the distance between the curves $y = x$ and $y = x^2$ in the interval $[0, 1]$.

- (b) फलनक

$$I[y(x)] = \int_0^{\pi/2} (y'^2 - y^2) dx,$$

$$y(0) = 0, \quad y(\pi/2) = 1$$

का चरममान (उच्चिष्ठ) परीक्षण कीजिए।

Test for extremum the functional

$$I[y(x)] = \int_0^{\pi/2} (y'^2 - y^2) dx,$$

$$y(0) = 0, \quad y(\pi/2) = 1$$

- (c) वृत्त $x^2 + y^2 = 1$ और सरल रेखा $x + y = 4$ के बीच की लघुत्तम (न्यूनतम) दूरी ज्ञात कीजिए।

(7)

Find the shortest distance between the circle $x^2 + y^2 = 1$ and the straight line $x + y = 4$.
