



FD-2708

B.Sc./B.Sc. B.Ed. (Part-II)
Examination, 2022

MATHEMATICS

Paper - I

Advanced Calculus

Time : Three Hours]

[*Maximum Marks* : 50

नोट : प्रत्येक प्रश्न से किन्हीं दो भागों के उत्तर दीजिए।
सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

Note : Answer any **two** parts from each question. All
questions carry equal marks.

इकाई / Unit-I

1. (a) सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक कौशी अनुक्रम परिबद्ध होता है।

Prove that every Cauchy sequence is bounded.

(2)

(b) सिद्ध कीजिए कि :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{(\lfloor n \rfloor)^{1/n}} = e$$

Prove that :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{(\lfloor n \rfloor)^{1/n}} = e$$

(c) श्रेणी $1 + \frac{x}{2} + \frac{|2}{3^2}x^2 + \frac{|3}{4^3}x^3 + \dots$ का अभिसरण के लिए परीक्षण कीजिए।

Test the convergence of the series :

$$1 + \frac{x}{2} + \frac{|2}{3^2}x^2 + \frac{|3}{4^3}x^3 + \dots$$

इकाई / Unit-II

2. (a) दिखाइए की फलन

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & \text{जब } x \neq 0 \\ 0, & \text{जब } x = 0 \end{cases}$$

$x = 0$ पर संतत है परन्तु अवकलनीय नहीं है।

(3)

Show that the function :

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & \text{when } x \neq 0 \\ 0, & \text{when } x = 0 \end{cases}$$

is continuous but not differentiable at $x = 0$.

- (b) कौशी का मध्यमान प्रमेय लिखकर सिद्ध कीजिए।

State and prove Cauchy mean value theorem.

- (c) फलन $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$ के लिए अंतराल $[2, 4]$ में लैंग्रांज के मध्यमान प्रमेय सत्यापित कीजिए।

Verify Lagrange's mean value theorem for the function $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$ in the interval $[2, 4]$.

इकाई / Unit-III

3. (a) फलन $f(x, y) = x^2 + xy + y^2$ का $(x - 2)$ और $(y - 3)$ के घातों में प्रसार कीजिए।

(4)

Expand the function $f(x, y) = x^2 + xy + y^2$
in powers of $(x - 2)$ and $(y - 3)$.

(b) यदि $z(x + y) = x^2 + y^2$ हो, तो सिद्ध कीजिए कि

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 = 4 \left(1 - \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} \right)$$

If $z(x + y) = x^2 + y^2$, then prove that :

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 = 4 \left(1 - \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} \right)$$

(c) यदि $\mu_1 = \frac{x_2 x_3}{x_1}$, $\mu_2 = \frac{x_1 x_3}{x_2}$, $\mu_3 = \frac{x_1 x_2}{x_3}$ हो,

तो सिद्ध कीजिए कि

$$J(\mu_1, \mu_2, \mu_3) = 4$$

If $\mu_1 = \frac{x_2 x_3}{x_1}$, $\mu_2 = \frac{x_1 x_3}{x_2}$, $\mu_3 = \frac{x_1 x_2}{x_3}$, then

prove that :

$$J(\mu_1, \mu_2, \mu_3) = 4$$

इकाई / Unit-IV

4. (a) वक्रों के कुल $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{k^2 - \alpha^2} = 1$ का

अन्वालोप ज्ञात कीजिए, जहाँ α प्राचल है।

Find the envelope of the family of curves

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{k^2 - \alpha^2} = 1, \quad \text{where } \alpha \text{ is the}$$

parameter.

- (b) अतिपरवलय $2xy = a^2$ के केन्द्रज का समीकरण ज्ञात कीजिए।

Find the equation of evolute of the hyperbola $2xy = a^2$.

- (c) यदि $x + y + z = a$ हो, तो xyz का अधिकतम मान ज्ञात कीजिए।

If $x + y + z = a$, then find the maximum value of xyz .

इकाई / Unit-V

5. (a) सिद्ध कीजिए कि

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{\sin x}} \times \int_0^{\pi/2} \sqrt{\sin x} . dx = \pi$$

Prove that :

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{\sin x}} \times \int_0^{\pi/2} \sqrt{\sin x} . dx = \pi$$

(b) मान ज्ञात कीजिए :

$$\int_1^3 \int_{1/x}^1 \int_0^{\sqrt{xy}} xyz . dx . dy . dz$$

Calculate :

$$\int_1^3 \int_{1/x}^1 \int_0^{\sqrt{xy}} xyz . dx . dy . dz$$

(c) समाकलन के क्रम को बदलिए

$$\int_0^\infty \int_x^\infty \frac{e^{-y}}{y} . dx . dy$$

तथा इसका मूल्यांकन भी कीजिए।

(7)

Change the order of integration

$$\int_0^{\infty} \int_x^{\infty} \frac{e^{-y}}{y} \cdot dx \cdot dy$$

and hence evaluate it.
