

Roll No.

ED–2759

B. A./B. Sc./B. Sc. B. Ed. (Part III) EXAMINATION, 2021

MATHEMATICS

Paper Second

(Abstract Algebra)

Time : Three Hours

Maximum Marks : 50

नोट : प्रत्येक प्रश्न से कोई दो भाग हल कीजिए। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

Attempt any *two* parts from each question. All questions carry equal marks.

इकाई—1

(UNIT—1)

1. (अ) सिद्ध कीजिए कि प्रतिचित्रण $a \rightarrow a^{-1}$ समूह G से G पर स्वाकारिता है यदि और केवल यदि G आबेली समूह है।

Prove that the mapping $a \rightarrow a^{-1}$ defined from a group G to G is automorphism if and only if G is abelian group.

P. T. O.

- (ब) संयुग्मी सम्बन्ध की परिभाषा दीजिए। सिद्ध कीजिए कि किसी समूह G पर संयुग्मी सम्बन्ध एक तुल्यता सम्बन्ध होता है। 5

Define conjugate relation. Prove that the relation of 'conjugacy' on a group G is an equivalence relation.

- (स) मान लीजिए $A(G)$ समूह पर G पर परिभाषित स्वाकारिताओं का एक समूह है। तब दर्शाइये कि G पर परिभाषित आन्तरिक स्वाकारिताओं का समुच्चय :

$$I(G) = \{f_a \in A(G) : a \in G\}$$

$A(G)$ का एक उपसमूह होता है

Let $A(G)$ is a group of automorphism defined on a group G . Then show that the set of inner automorphism on G :

$$I(G) = \{f_a \in A(G) : a \in G\}$$

is a subgroup of $A(G)$.

इकाई—2

(UNIT—2)

2. (अ) वलयों के लिए समाकारिता का मूल प्रमेय—“एक वलय R का प्रत्येक समाकारी प्रतिबिम्ब, किसी विभाग वलय से तुल्याकारी होता है।” सिद्ध कीजिए।

Fundamental theorem on homomorphism of rings—“Every homomorphic image of a ring R , is isomorphic to a quotient ring.” Prove it.

- (ब) गुणजावली की परिभाषा दीजिए। सिद्ध कीजिए कि किसी वलय $(R, +, \cdot)$ की दो गुणजावलियों का सर्वनिष्ठ भी R का एक गुणजावली होता है। 5

Define ideal. Prove that the intersection of two ideals of a ring $(R, +, \cdot)$ is also an ideal.

- (स) क्षेत्र $I_6, +_6 \times_6$ पर निम्नलिखित बहुपदों का योग और गुणन ज्ञात कीजिए :

$$f(x) = 5 + 4x + 3x^2 + 2x^3 \text{ तथा}$$

$$g(x) = 1 + 4x + 5x^2 + x^3$$

जहाँ $I_6 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

Find the sum and product of following polynomials defined on the field $I_6, +_6 \times_6$, where $I_6 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ given that

$$f(x) = 5 + 4x + 3x^2 + 2x^3 \text{ and}$$

$$g(x) = 1 + 4x + 5x^2 + x^3$$

इकाई—3

(UNIT—3)

3. (अ) सिद्ध कीजिए कि किसी सदिश समष्टि $V(F)$ के एक अतिरिक्त उपसमुच्चय W को $V(F)$ का उपसमष्टि होने के लिए आवश्यक और पर्याप्त प्रतिबंध यह है :
- (i) $\alpha, \beta \in W \Rightarrow \alpha - \beta \in W$
- (ii) $a \in F, \alpha \in W \Rightarrow a \alpha \in W$

Prove that the necessary and sufficient conditions for a non-empty subset W of $V(F)$ to be a vector subspace of $V(F)$ is that :

$$(i) \quad \alpha, \beta \in W \Rightarrow \alpha - \beta \in W$$

$$(ii) \quad a \in F, \alpha \in W \Rightarrow a \alpha \in W$$

- (ब) रैखिकतः-स्वतंत्र सदिश की परिभाषा दीजिए। यदि α, β, γ किसी सदिश समष्टि $V(F)$ के रैखिकतः-स्वतंत्र सदिश हों तो दिखाइए कि :

$$\alpha + \beta, \beta + \gamma, \gamma + \alpha$$

भी रैखिकतः-स्वतंत्र सदिश होंगे; जहाँ F समिश्र संख्याओं का क्षेत्र है।

Define linearly-independent vectors. If α, β, γ are linearly-independent vectors of a vector-space $V(F)$, then show that :

$$\alpha + \beta, \beta + \gamma, \gamma + \alpha$$

are also the linearly-independent vectors; where F is the field of complex numbers.

- (स) सदिश समष्टि $V_3(\mathbb{R})$ के उपसमुच्चय $S = \{ (1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 1, 0), (1, 0, 0) \}$ के सापेक्ष सदिश $\alpha = (4, -3, 2)$ का निर्देशांक सदिश ज्ञात कीजिए।

Find the co-ordinate vector of $\alpha = (4, -3, 2)$ with respect to the subset

$S = \{ (1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 1, 0), (1, 0, 0) \}$ of vector space $V_3(\mathbb{R})$.

इकाई—4

(UNIT—4)

4. (अ) मान लीजिए क्षेत्र \mathbb{R} पर $V_2(\mathbb{R})$ क्रमित-युग्मों का सदिश समष्टि है; तो सिद्ध कीजिए कि रूपान्तरण $f : V_2(\mathbb{R}) \rightarrow V_2(\mathbb{R})$ जो $f(x, y) = (x \cos \theta - y \sin \theta, x \sin \theta + y \cos \theta)$ से परिभाजित है, एक तुल्याकारिता है।

Let $V_2(\mathbb{R})$ is a vector space of ordered pairs of elements of field \mathbb{R} . Then show that the transformation $f : V_2(\mathbb{R}) \rightarrow V_2(\mathbb{R})$ defined by : $f(x, y) = (x \cos \theta - y \sin \theta, x \sin \theta + y \cos \theta)$ is an isomorphism.

- (ब) किसी आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ के आइगेन मानों के संगत

सभी आइगेन सदिश ज्ञात कीजिए ? आइगेन समीकरण की परिभाषा लिखिए।

5

Find all the eigen vectors corresponding to eigen

values of the matrix : $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

Also define the eigen equation.

- (स) लेग्रांज के समानयन विधि से द्विघाती-समघात :

$$q = x_1^2 + 2x_2^2 - 7x_3^2 - 4x_1x_2 + 8x_1x_3$$

को बहित-समघात में समानयन कीजिए और इसकी जाति, सूचकांक और चिन्हिका ज्ञात कीजिए।

Using Lagrange's method, reduce the given quadratic form :

$$q = x_1^2 + 2x_2^2 - 7x_3^2 - 4x_1x_2 + 8x_1x_3$$

into canonical form; and find its rank, index and signature.

इकाई—5

(UNIT—5)

5. (अ) यदि α तथा β किसी आन्तर गुणन समष्टि $V(F)$ में कोई दो सदिश हों तो सिद्ध कीजिए कि

$$\|\alpha\beta\|^2 + \|\alpha - \beta\|^2 = 2\|\alpha\|^2 + 2\|\beta\|^2$$

तथा परिणाम की ज्यामितीय व्याख्या कीजिए।

If α and β are two vectors of an inner product space $V(F)$, then prove that

$$\|\alpha\beta\|^2 + \|\alpha - \beta\|^2 = 2\|\alpha\|^2 + 2\|\beta\|^2$$

and give the geometrical interpretation of the result.

- (ब) आन्तर गुणन समष्टि की परिभाषा लिखिए। माना कि $V(C)$ इकाई अन्तराल $0 \leq t \leq 1$ पर सभी सतत् संमिश्र मानक फलनों का सदिश समष्टि है। यदि $f(t), g(t) \in V$ तथा

$$\langle f(t), g(t) \rangle = \int_0^1 f(t), \overline{g(t)} dt$$

तो सिद्ध कीजिए कि V आन्तर-गुणन समष्टि है। 5

Define inner-product space. Let $V(C)$ be a vector space of all continuous norm functions on the unit interval $0 \leq t \leq 1$. If $f(t), g(t) \in V$ and

$$\langle f(t), g(t) \rangle = \int_0^1 f(t), \overline{g(t)} dt$$

then prove that V is an inner-product space.

(स) ग्राम-शिमिट विधि से $V_4(\mathbb{R})$ के निम्न एक घातीय स्वतंत्र सदिश के समुच्चय S का अभिलाम्बिकीकरण कीजिए :

$$S = \beta_1, \beta_2, \beta_3$$

जहाँ

$$\beta_1 = 1, 0, 1, 1, \beta_2 = -1, 0, -1, 1,$$

$$\beta_3 = 0, -1, 1, 1.$$

Using Gram-Schmidt method, make the orthonormalization of vectors of linearly independent setson $V_4(\mathbb{R})$, for $S = \beta_1, \beta_2, \beta_3$ when :

$$\beta_1 = 1, 0, 1, 1, \beta_2 = -1, 0, -1, 1,$$

$$\beta_3 = 0, -1, 1, 1.$$